Hem fet veure, en l'anterior conferència, que poden existir cicles límits, és a dir, corbes integrals closes entorn de les quals s'enrotllen les altres corbes integrals, d'una banda i d'altra, mentre no vagin a trobar punts singulars (nusos o focus).

Es tracta de cercar aquests cicles límits, de saber on són i quants n'hi ha, talment com hem obtingut els punts singulars.

Poincaré reïx en la resolució, en casos molt extensos, d'aquesta qüestió d'alta dificultat i al mateix temps d'alta importància per a l'estudi qualitatiu.

Per a això fa, sobretot, ús de la consideració dels cicles sense contacte.

Admetem, per exemple, que aconseguim trobar-ne un. Una trajectòria que penetri en aquest cicle ja no en pot eixir: caldrà que trobi un punt singular o un cicle límit. Si a l'interior del primer cicle sense contacte en trobem un altre també sense contacte, però en sentit invers, *cal que hi hagi* un cicle límit en la regió anular compresa entre ambdós cicles. En un mot, els cicles sense contacte fan, respecte, als cicles límits, el mateix servei que els nombres que fan positiu o negatiu el primer membre d'una equació, respecte a les arrels de l'equació.

Hi ha casos en què hom obté fàcilment els cicles límits. Consideracions semblants permeten demostrar que en una certa regió *no hi ha* cicles límits. Suposem que hi ha, en una certa regió de l'esfera, una família de cicles sense contacte $F =$ const. Es evident que no pot haver-hi cap cicle límit C enterament contingut en aquesta regió, car, en aquest cicle, F tindria necessàriament un màximum i un mínimum, i alehores C seria necessàriament tangent a un dels cicles sense contacte. No pot tampoc estar-hi contingut parcialment, car o no podria sortir-ne o no podria entrar-hi. Un cicle C no pot, doncs, passar per aquesta regió (*).

Altres condicions formades per Poincaré permeten establir que una regió és *monocíclica*, és a dir que no té sinó un cicle límit.

Farem, ara, una aplicació de ço que acabem de dir a l'estudi del punt singular excepcional que havem deixat de banda en la lliçó precedent. Es el cas en què les arrels imaginàries en λ no tenien part real, i en què hom pot, conseqüentment, donar a les equacions diferencials a l'entorn de l'origen la forma

$$\frac{d(x+iy)}{dt} = i\lambda\,(x+iy) + \dots$$

$$\frac{d(x-iy)}{dt} = -i\lambda(x-iy) + \dots$$

o sigui

$$\frac{dx}{dt} = -y + \dots = X$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \dots = Y.$$

(*) Els cicles sense contacte empresonen en certa manera, entre ells, els cicles límits. Així hom pot concebre com Poincaré ha pogut arribar a demostrar que *existeix sobre l'esfera una xarxa topogràfica* (família de corbes anàlogues a les corbes de nivell) *formada per cicles sense contacte i cicles límits.*

Considerem l'equació entre derivades parcials

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

que en el nostre cas serà

$$(-y+\ \dots)\frac{\partial F}{\partial x}+(x+\ \dots)\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Si no teníem més que els termes de primer grau n'hi hauria prou amb pendre

$$F=x^2+y^2.$$

Admetem que això sigui una primera aproximació, de manera que

$$F=x^2+y^2+F_3+F_4+\ \dots .$$

essent $F_3, F_4, \dots$ termes de tercer, quart,... grau.

Per a determinar-los tindrem equacions de la forma

$$-y\frac{\partial F_3}{\partial x}+x\frac{\partial F_3}{\partial y}=\Phi_3,$$

essent Φ_3 conegut. Si trobo F_3 amb aquesta equació, en tindré una altra tota semblant per a F_4, i així successivament. Cada polinomi Φ serà conegut pels càlculs precedents.

Cal fer aquí una observació. Si una F és coneguda, hom tindrà una infinitat de funcions que satisfan a la mateixa equació entre derivades parcials en pendre

$$F'=F+k_2F^2+k_3F^3+\ \dots .$$

essent les k constants arbitràries.

L'equació que serveix per a determinar F_p, és redueix en coordenades polars, a

$$\frac{\partial F_p}{\partial \omega} = \Phi_p.$$

Si pot fer-se la integració, en resulta una constant arbitrària que no té interès, car correspon al fet que F pot ésser substituït per F'. Però perquè la integració sigui possible cal que en Φ_p no hi hagi terme constant, per tal com en la integral originaria un terme de la forma $C\omega$.

Si p és parell, això pot ocórrer, doncs, a cada valor parell de p correspon una condició de possibilitat del problema. Si una sola d'aquestes no és satisfeta, $F(x,y) = \text{const.}$ no és solució. Però, en suposar que totes són satisfetes, les corbes $F(x,y) = \text{const.}$ seran aproximadament cercles que volten l'origen, que resulta ésser un *centre*.

Però, com ja s'ha dit, això no s'esdevindrà sinó molt rarament.

Serà, per exemple, per a $p=4$, que hom serà detingut en la integració i tindrà, essent C una constant i $F = x^2 + y^2 + F_3 + F_4$,

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = -C(x^2+y^2)^4 + \dots$$

La valor $X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y}$ tindrà entorn de l'origen signe contrari a C.

Les corbes $F = \text{const.}$ seran cicles sense contacte. Si $C > o$, la fletxa està constantment dirigida vers l'interior. Aleshores l'origen no és un centre, i, com que F és decreixent sobre tota corba integral, és un focus.

Sabem ara ço que s'esdevé per a una equació de primer ordre i de primer grau en $\frac{dy}{dx}$. ¿Què s'esdevindrà per a una equació de primer ordre i de grau superior

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o \quad ?$$

Podrà, primerament, esdevenir-se que la teoria sigui enterament idèntica a la precedent. No és, efectivament, el grau, l'important aquí, i retrobem una noció que havia aparegut, per primer cop en la Ciència amb Riemann, però de la qual les recerques de Poincaré havien de mostrar la veritable significació: és la *geometria de situació,* ciència de les propietats geomètriques que no canvien, siguin com siguin les deformacions sofertes per una figura, posat que no intervingui ni estripament ni soldadura.

Sembla que Euler ha estat el primer que s'ha ocupat de problemes interessants d'aquesta naturalesa. Tothom coneix son teorema sobre el nombre C de cares, V de vèrtexs i A d'arestes, en un políedre

$$C + V = A + 2.$$

Els políedres més coneguts verifiquen aquesta igualtat.

Cauchy ha cregut demostrar-lo en 1813, i és precisament l'error de creure en sa total generalitat que l'ha privat de fer les grans descobertes en una part del domini de les funcions analítiques, la glòria de les quals ha deixat a Riemann.

Si el políedre té la forma general d'un tor, hom no té la relació d'Euler, sinó

$$C + V = A.$$

Si està format per dos anells soldats,

$$C+V=A-2.$$

Això depèn de l'ordre de connexió. Si Cauchy hagués vigilat un xic més la rigor de sa demostració, hauria comprès el fonament de l'Anàlisi *situs* que ha permès aportar tanta llum a la teoria de les funcions analítiques. Poincaré ha demostrat com era indispensable de servir-se'n per a fonamentar la teoria de les equacions diferencials. Aquesta necessitat es desprèn lògicament dels principis establerts en ço que precedeix.

Amb Newton i Cauchy hom coneixia les integrals en petits dominis. Calia després (ja ho sabem) reunir els resultats. Però la geometria de situació demostra que tals reunions poden ésser de naturalesa pregona i essencialment diferents unes d'altres: tindrem propietats de conjunt que seran distintes de les propietats locals.

Un trosset d'esfera i un trosset de tor són enterament semblants, però una esfera i un tor són enterament diferents. El mètode local no ens diu res d'aquestes propietats de conjunt. Una mica de reflexió sobre la naturalesa d'aquest passatge del local al general degué advertir als geòmetres que era impossible ometre les propietats topològiques.

Doncs bé: quan la superfície

$$f(x,y,z)=0,$$

derivada de l'equació

$$f(x,y,y')=0,$$

és de gènere zero, qualsevulla que sigui son grau, tot s'esdevé com per a l'esfera. Tota corba closa — hem dit — divideix l'esfera en dues regions distintes. Es aquesta propietat la que havem utilitzat quan hem parlat dels cicles sense contacte i hem demostrat l'existència de tals cicles. Tota la teoria precedent subsisteix.

En el tor (gènere un) ja no és així. L'anàlisi és, en tal cas, de naturalesa nova i molt més difícil; el mateix Poincaré, en donar una idea dels diversos casos que poden presentar-se, està lluny d'haver resolt la sèrie de qüestions d'aritmètica i d'anàlisi que es plantegen.

L'Anàlisi *situs* està ja en la base d'un estudi que Poincaré ha exposat des del principi de son treball, però que, per la raó que acabem de dir, havem reservat per a l'actual moment.

Hem parlat del que s'esdevé entorn dels punts singulars de l'equació de primer ordre.

Hom pot preguntar-se, però ¿és que hi ha necessàriament punts singulars?

La resposta és afirmativa en l'esfera o en tota altra superfície closa de gènere zero.

Imaginem un cicle en l'esfera, el contorn del qual sigui suficientment petit i que no contingui punts singulars ni en l'interior ni en el contorn.

En tots els seus punts la fletxa de les integrals no sofrirà canvis apreciables de direcció. La tangent al cicle, sobre el qual hom haurà marcat un sentit de curs, donarà una volta completa o, ço que és equivalent, descriurà un angle de 2π respecte a la fletxa abans definida (direcció de la tangent a la corba integral en cada punt) quan hom haurà retornat al punt de partida.

Una corba closa qualsevulla podrà ésser descomposta en cicles més petits, a la manera d'un paviment.

Mentre no contingui punts singulars, és fàcil deduir-ne que l'angle de les tangents per a una volta completa haurà variat de 2π.

Hom veu que aquest resultat és cert, amb dues condicions: que no hi ha punts singulars i possibilitat del paviment; ço que per a l'esfera es tradueix en la condició anàloga a la d'Euler per als políedres oberts

$$C+V=A+1.$$

Però suposem que el cicle elemental conté un nus o un focus. L'angle no variarà en fer la volta, car ambdues fletxes giren al mateix temps en igual sentit.

Si és un coll, giren al mateix temps en sentits contraris, i l'angle varia de 4π.

Es per consideracions una mica diferents de primer antuvi, però en el fons equivalents, aplicades al cas general, que Poincaré perví, en un cicle clos, a la fórmula

$$N+F-C=I$$

nombre de nusos, més el de focus, menys el de colls, igual a I. Aquesta valor I és l'*índex* del cicle. I es relaciona immediatament amb la variació d'angle susdita. Poincaré la defineix, fent cas omís del factor 2, com l'excés dels canvis de signe de $\frac{Y}{X}$ quan passa de $+\infty$ a $-\infty$, sobre els canvis de signe quan passa de $-\infty$ a $+\infty$, si seguim el contorn d'un cicle que conté els dits punts singulars en son interior. Per a l'esfera, per exemple, $I=2$, i hom retroba una fórmula anàloga a la d'Euler; per al tor $I=0$.

Hom en dedueix que un sistema de corbes definides per una equació diferencial de primer ordre i de primer grau en l'esfera té sempre punts singulars. Un sistema en el tor pot no tenir-ne.

Aquesta noció de l'índex té també importància des del punt de vista de la qüestió capital estudiada darrerament: la dels cicles límits.

Efectivament, l'índex d'un cicle límit és diferent de zero (car el nostre angle és constantment nul), i hom veu que tot cicle límit (i també tot cicle sense contacte) té punts singulars dintre i fora. Aquests resultats demostren la diferència que hi ha entre les equacions diferencials segons el gènere i la connexió de la superfície a la qual es refereixen.

W. Dyck, en memòries sobre l'Anàlisi *situs* (*Math. Annalen*, 1888, i diverses memòries de l'Acad. de Munich), ha reprès i desenrotllat l'anàlisi de Poincaré (*).

En tots els casos és de gran utilitat la noció de l'*índex* o de la característica introduïda per Kronecker per a l'estudi de les arrels comunes a diverses equacions.

Recordem en què consisteix aquest teorema. Siguin primerament dues equacions $X=o$ i $Y=o$ amb dues incògnites x, y, i, en el pla de les $x\,y$, un contorn clos s, en el qual el sistema de les dues equacions precedents no tingui punts solucions, de manera que, en un punt situat en s, el vector (X, Y) no sigui mai nul. La variació d'argument d'un tal vector, quan (x, y) descriu s i retorna al punt de partida, és un nombre enter de vegades 2π. Aquest nombre és l'índex de Kronecker.

Aquest nombre és nul si el sistema $X=o, Y=o$ *no té cap solució interior a* s. (Si no, està representat pel nombre de solucions d'aquest sistema interiors a s, comp-

(*) W. Dyck, altrament, no s'ha adonat sempre que els seus resultats no eren distints dels de Poincaré. Això passa per als punts singulars que ell considera sobre el contorn aparent de la superfície $f(x, y, z)=o$ (integral singular pressentida pels tractats antics), és a dir, per a $\frac{\partial f}{\partial z}=o$. Les figures que ell obté es troben immediatament en projectar les de Poincaré sobre el pla xy.

tades, però, amb el signe + o el signe — segons el signe del jacobià $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$, per a cada una d'elles.)

Considerem ara les tres equacions $X=o$, $Y=o$, $Z=o$ (amb tres incògnites x, y, z) i la superfície closa S, de la qual es suposa que cap punt és solució del sistema $X=o$, $Y=o$, $Z=o$.

L'extrem del vector (X, Y, Z) descriu, quan (x, y, z) descriu S, una superfície closa Σ, de forma més o menys complicada, però (en força de la hipòtesi) que no passa per l'origen i a la qual hom pot estendre una *capa doble de densitat* 1, el potencial de la qual pendrem a l'origen: altrament dit, hom considerarà l'*angle sòlid* segons el qual es veu Σ des de l'origen i que és un múltiple de 4π, car Σ és closa.

Sigui $\Omega = 4n\pi$. El nombre enter n és la característica de Kronecker.

Es també nul si el nostre sistema de tres equacions no té cap solució a l'interior de S.

El teorema es generalitza també d'una manera semblant a un nombre qualsevulla q d'equacions amb l'ús dels potencials en l'espai a q dimensions

$$\left(\int\int \cdots\cdots \int dS \frac{d}{dn} \frac{1}{z^{q-2}}\right)$$

El teorema de Kronecker (Ac. de Berlín, 1878) acabava quasi de presentar-se quan Poincaré l'utilitza per a son anàlisi.

Ell li donà nova potència amb el notable teorema següent, que fou retrobat alguns anys després (en una altra forma) per Bohl:

«*Sobre una superfície closa donada* S, *o els dos sistemes* (X, Y, Z) *i* (X_1, Y_1, Z_1) *tenen la mateixa característica* *de Kronecker, o existeix (sobre S) almenys un punt tal que* $\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} > 0$, *i al menys un punt tal que*

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} < 0.»$$

La demostració que Poincaré donà d'aquest bell teorema és tan senzilla que pot indicar-se en quatre mots.

Considerem el sistema $(X+\lambda X_1, Y+\lambda Y_1, Z+\lambda Z_1)$, on λ és un paràmetre real. Quan λ varia, la característica d'aquest sistema no pot canviar sinó quan $X+\lambda X_1$, $Y+\lambda Y_1, Z+\lambda Z_1$ s'anul·len en un mateix punt de S.

Doncs si (X, Y, Z) i $(X_1\ Y_1\ Z_1)$ no tenen la mateixa característica, cal que ço que acabem de dir ocorri una vegada, almenys, quan es fa variar λ de 0 a $+\infty$, i també quan es fa variar λ de 0 a $-\infty$; d'on la proposició enunciada.

Hom veu, així, com aquestes qüestions de topologia són de gran importància, i que Poincaré s'hi ha distingit. Veure, per exemple, el *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1895, i els *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1899 i 1904, entre altres.